6. POVRŠINE

Parametarske funkcije koje opisuju površinu su u nekim dijelovima različite od onih primijenjenih za krivulje. Za površine su potrebne dvije nezavisne parametarske varijable, tako da jednačine općenito imaju slijedeći oblik:

$$x = x(u,w),\ y = y(u,w),\ z = z(u,w) \tag{6.1}$$

Obe parametarske varijable su obično ograničene za područje $0 \le u,\ w \le 1$, koje se češće izražava kao $u,\ w \in [0,\ 1]$. Ovo definiše jednostavan element površine, nazvan *surface patch*, ili samo *patch*, što se može prevesti kao *segment površine*, ili samo kao *segment*. U praksi se mogu modelirati kompleksne površine povezivanjem različitih segmenata.

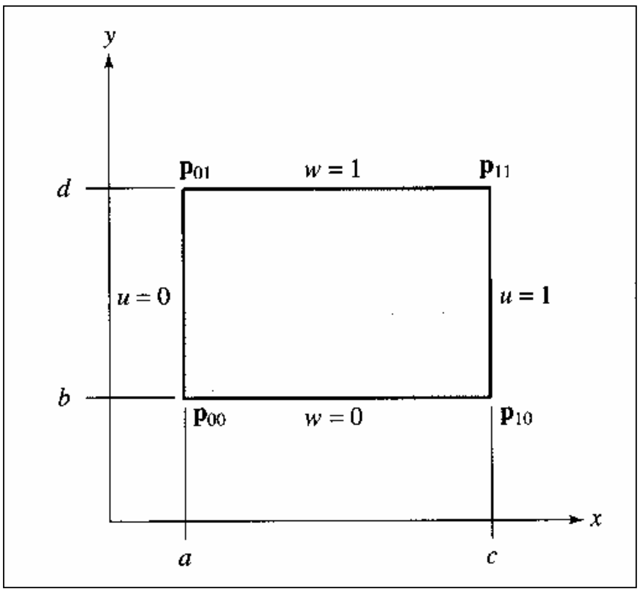
6.1 Ravnine

Najjednostavniji segment je ravnina. Slijedeće jednačine definišu ravninski segment u x, y ravnini:

$$\begin{aligned} x &= (c - a)u + a \\ y &= (d - b)w + b \\ z &= 0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

gdje su $u,\ w \in [0,\ 1]$ i a, b, c i d konstantni koeficijenti. Slika 6.1 prikazuje ovaj segment, koji ima mali broj za identifikaciju jednostavnih karakteristika. Njegove četiri tačke na uglovima korespondiraju vektorima čije komponente su definisane kako slijedi:

$$\begin{aligned} &\text{Za } u = 0 \text{ i } w = 0,\ \mathbf{p}_{00} = [a \quad b \quad 0] \\ &\text{Za } u = 0 \text{ i } w = 1,\ \mathbf{p}_{01} = [a \quad d \quad 0] \\ &\text{Za } u = 1 \text{ i } w = 0,\ \mathbf{p}_{10} = [c \quad b \quad 0] \\ &\text{Za } u = 1 \text{ i } w = 1,\ \mathbf{p}_{11} = [c \quad d \quad 0] \end{aligned} \tag{6.3}$$



Sl. 6.1 Ograničena ravnina

Granice su naravno prave linije, dobivene kada se slijedeći uslovi uvedu u jednačine 6.2:

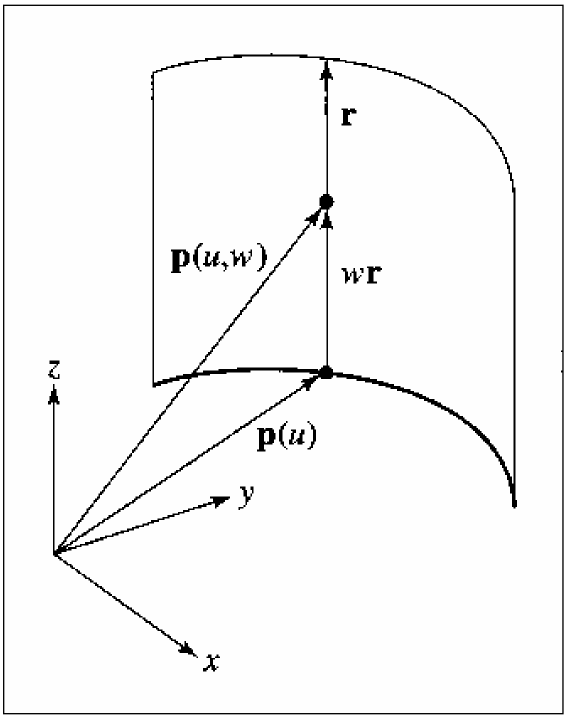
$$\begin{array}{llll} u=0, & x=a, & y=(d-b)w+b, & z=0 \\ u=1, & x=c, & y=(d-b)w+b, & z=0 \\ w=0, & x=(c-a)u+a, & y=b, & z=0 \\ w=1, & x=(c-a)u+a, & y=d, & z=0 \end{array} \tag{6.4}$$

Jednačine 6.2 očito daju ograničen i ne prevelik broj postojećih varijanti ravninskih segmenata. Na primjer, iste generiraju samo segmente koji leže u ravni x, y, čije granice su prave linije.

6.2 Cilindrične površine

Cilindrične površine su generirane pravom linijom koja se kreće paralelno samoj sebi duž neke krive (Sl. 6.2). Ovu površinu je lako definisati sa parametarskim funkcijama i vektorskim jednačinama. Slijedeća jednačina daje tačke na cilindričnoj površini:

$$\mathbf{p}(u, w) = \mathbf{p}(u) + w\mathbf{r} \tag{6.5}$$



Sl. 6.2 Cilindrična površina

Kako ova jednačina generira cilindričnu površinu? Prvo, $\mathbf{p}(u)$ generira krivu, koja može biti kriva u ravnini, prostorna kriva, Hermitova kubna kriva, Bezierova kriva, ili neki drugi tip krive. Potom, član $w\mathbf{r}$ generira tačke duž $\mathbf{r}$ od $w = 0$ do $w = 1$, dok se $\mathbf{r}$ izvlači duž $\mathbf{p}(u)$ za vrijednosti u od $u = 0$ do $u = 1$.

Četiri granične tačke ove površine su:

$$\begin{array}{lll} u = 0, & w = 0, & \mathbf{p}_{00} = \mathbf{p}_0 \\ u = 0, & w = 1, & \mathbf{p}_{01} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{r} \\ u = 1, & w = 0, & \mathbf{p}_{10} = \mathbf{p}_1 \\ u = 1, & w = 1, & \mathbf{p}_{11} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{r} \end{array} \tag{6.6}$$

Četiri granične krive su:

$$\begin{array}{ll} u = 0, & \mathbf{p}_0 + w\mathbf{r} \\ u = 1, & \mathbf{p}_1 + w\mathbf{r} \\ w = 0, & \mathbf{p}(\mathrm{u}) \\ w = 1, & \mathbf{p}(\mathrm{u}) + \mathbf{r} \end{array} \tag{6.7}$$

6.3 Bikubne površine

Općenitija vrsta površine je bikubni segment površine, koji je dat slijedećom jednačinom:

$$\mathbf{p}(u, w) = \sum \sum \mathbf{a}_{ij}\, u^i\, w^j \tag{6.8}$$

$\mathbf{a}_{ij}$ vektori su algebarski koeficijenti. Jednačina je bikubna, pošto se dvije parametarske varijable, u i w, javljaju kao kubni članovi. Ovdje je 16 $\mathbf{a}_{ij}$ vektora, svaki sa tri komponente, što znači da je ovdje 48 stepeni slobode ili koeficijenata koje moramo specificirati za definisanje jedinstvene površine. Dupli indeksi su neophodni zbog toga što su ovdje dvoparametarske varijable.

Razvojem jednačine 16.8 dobije se slijedeći izraz:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(u, w) = {} & \mathbf{a}_{33}u^3w^3 + \mathbf{a}_{32}u^3w^2 + \mathbf{a}_{31}u^3w + \mathbf{a}_{30}u^3 \\ & + \mathbf{a}_{23}u^2w^3 + \mathbf{a}_{22}u^2w^2 + \mathbf{a}_{21}u^2w + \mathbf{a}_{20}u^2 \\ & + \mathbf{a}_{13}uw^3 + \mathbf{a}_{12}uw^2 + \mathbf{a}_{11}uw + \mathbf{a}_{10}u \\ & + \mathbf{a}_{03}w^3 + \mathbf{a}_{02}w^2 + \mathbf{a}_{01}w + \mathbf{a}_{00} \end{aligned} \tag{6.9}$$

Ovaj šesnaestočlani polinom u u i w definiše set svih tačaka koje leže na površini. To je algebarska forma bikubnog segmenta (patch). Primjenom matrične notacije, prethodni izraz se može napisati u obliku:

$$\mathbf{p}(u, w) = \mathbf{UAW}^{\mathrm{T}} \tag{6.10}$$

gdje su:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w^3 & w^2 & w & 1 \end{bmatrix},$$

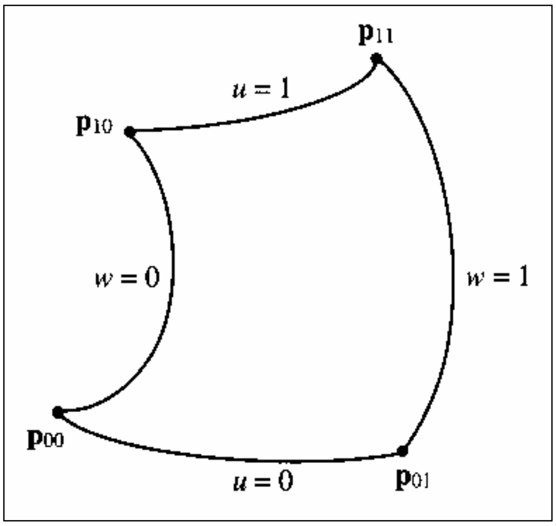
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{30} \\ \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{20} \\ \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{10} \\ \mathbf{a}_{03} & \mathbf{a}_{02} & \mathbf{a}_{01} & \mathbf{a}_{00} \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

Kao i kod krivulja, algebarski koeficijenti segmenta određuju njegov oblik i položaj u prostoru. Međutim, segmenti iste veličine i oblika imaju različit set koeficijenata ako zauzimaju različite položaje u prostoru. Promjena bilo kojeg od 48 koeficijenata, rezultira dobivanjem potpuno drugačijeg segmenta. Može se promijeniti ili njegov oblik, ili njegov položaj.

Jednačina 6.9 generira tačku na segmentu svaki put kada u nju unesemo određeni par vrijednosti za u i w. Ali zbog toga što raspon nezavisnih varijabli x, y i z nije ograničen, tako isto ni raspon algebarskih koeficijenata nije ograničen.

Bikubni segment je ograničen s četiri krivulje (Slika 6.3), pri čemu je svaka od njih parametarska kubna krivulja. Postupak za njihovo određivanje je jednostavan. Na primjer, ako je $w = 0$, tada svi članovi koji sadrže w postaju nula, i jenačina 6.9 postaje:

$$\mathbf{p}(u, w) = \mathbf{a}_{30}u^3 + \mathbf{a}_{20}u^2 + \mathbf{a}_{10}u + \mathbf{a}_{00} \qquad (6.12)$$



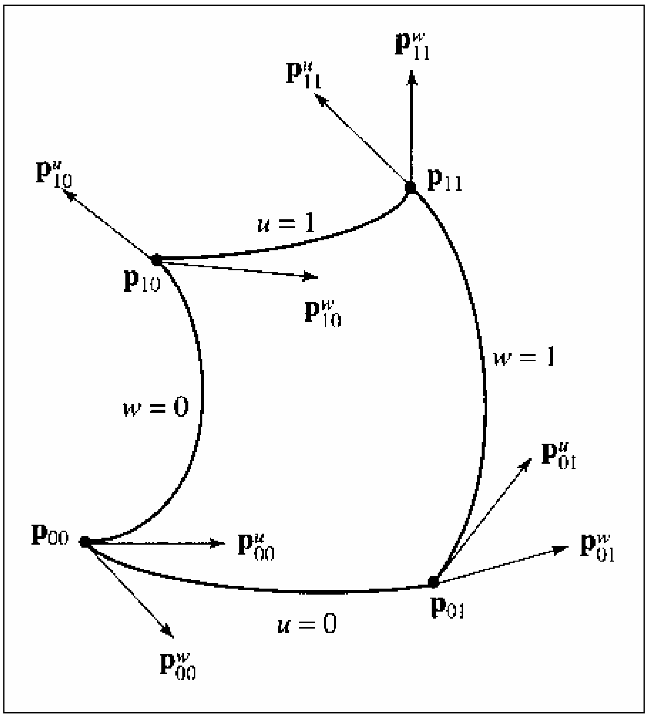
Sl. 6.3 Neki elementi bikubnog segmenta

Dobivena je jednačina za parametarsku kubnu krivu. Slične krive se dobiju kada unesemo $u = 0$, $u = 1$, ili $w = 1$. Unošenje drugih u ili w, jednakih nekim konstantama, daje krivu na površini. Krive konstanti u, ili w nazivaju se *izoparametarskim* krivim na površini.

Ograničenja geometrije segmenata su data u tačkama uglova. Tu su najprije koordinate ove četiri tačke, zatim su tu tangente vektora povezanih sa graničnim krivuljama. Konačno, tu je i *twist* vektor na svakom uglu, koji kontroliše stepen promjene vektora tangenti internih izoparametarskih krivulja.

Svi vektori graničnih uslova formiraju matricu od 16 elemenata:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{00} & \mathbf{p}_{01} & \mathbf{p}_{00}^{w} & \mathbf{p}_{01}^{w} \\ \mathbf{p}_{10} & \mathbf{p}_{11} & \mathbf{p}_{10}^{w} & \mathbf{p}_{11}^{w} \\ \mathbf{p}_{00}^{u} & \mathbf{p}_{01}^{u} & \mathbf{p}_{00}^{uw} & \mathbf{p}_{01}^{uw} \\ \mathbf{p}_{10}^{u} & \mathbf{p}_{11}^{u} & \mathbf{p}_{10}^{uw} & \mathbf{p}_{11}^{uw} \end{bmatrix} \qquad (6.17)$$



Sl. 6.4 Granični uvjeti bikubnog segmenta

Kompletna matrična jednačina za bikubni Hermitov segment, na bazi pomenutih geometrijskih koeficijenata je:

$$\mathbf{p}(u, w) = \mathbf{UMBM}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \tag{6.18}$$

gdje je matrica M matrica za kubnu Hermitovu krivu.

Odnos između algebarskih i geometrijskih koeficijenata je dat matričnim izrazom:

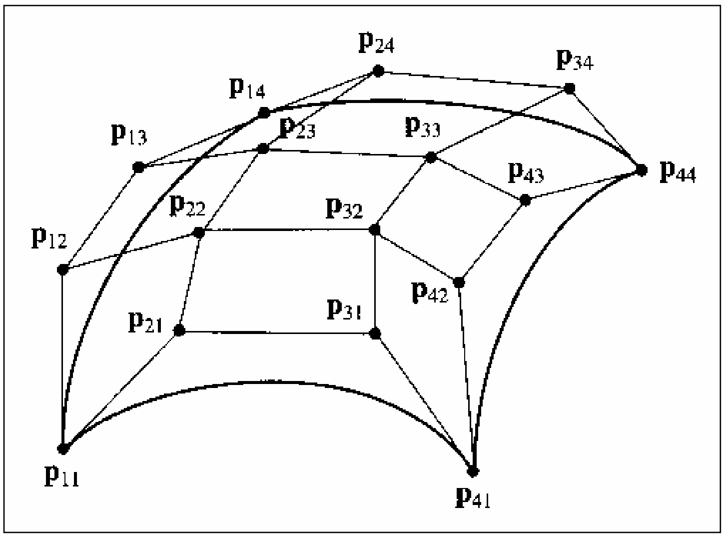
$$\mathbf{A} = \mathbf{MBM}^{\mathbf{T}} \tag{6.19}$$

i $$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{M}^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{6.20}$$

6.4 Bezierove površine

Bezierova površina zahtijeva mrežu *kontrolnih tačaka* za njenu definiciju (Slika6.5). Ove kontrolne tačke definišu *karakteristični poliedar*, analogan karakterističnom poligonu Bezierove krive. Određivanje slijedeće parametarske funkcije na setu *u*, *w* vrijednosti generira tačke na Bezierovoj površini:

$$\mathbf{p}(u, w) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{p}_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(w) \quad (6.21)$$



Sl. (6.5) Bikubna Bezierova površina

Razvojem jednačine (6.21) za 4 x 4 mrežu tačaka daje bikubnu površinu. Odgovarajuća matrična jednačina ima oblik:

$$\mathbf{p}(u, w) = \begin{bmatrix} (1-u)^3 \\ 3u(1-u)^2 \\ 3u^2(1-u) \\ u^3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{11} & \mathbf{p}_{12} & \mathbf{p}_{13} & \mathbf{p}_{14} \\ \mathbf{p}_{21} & \mathbf{p}_{22} & \mathbf{p}_{23} & \mathbf{p}_{24} \\ \mathbf{p}_{31} & \mathbf{p}_{32} & \mathbf{p}_{33} & \mathbf{p}_{34} \\ \mathbf{p}_{41} & \mathbf{p}_{42} & \mathbf{p}_{43} & \mathbf{p}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-w)^3 \\ 3w(1-w)^2 \\ 3w^2(1-w) \\ w^3 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$